ISSN 1683-4720. Труды ИПММ НАН Украины. 2002. Вып. 8

УДК 518.5 : 669.187

©2002. **А.А. Иванова**

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОЦЕССА ЗАТВЕРДЕВАНИЯ НЕПРЕРЫВНОГО СЛИТКА В ЗОНЕ ВТОРИЧНОГО ОХЛАЖДЕНИЯ

Построена двумерная математическая модель температурного поля зоны вторичного охлаждения для криволинейной машины непрерывного литья заготовок. Квазистационарные процессы внутреннего теплообмена описываются нелинейными эллиптическими уравнениями в частных производных. На границе раздела фаз сформулировано условие Стефана для двумерного случая. Граничные условия включают два механизма теплообмена: лучистый и конвективный, которые учитывают сложный механизм теплоотвода за счёт водовоздушного охлаждения. Разработан алгоритм решения поставленной задачи методом конечных разностей.

Введение.

Металлургический комплекс занимает важнейшее место в экономике Украины. Именно он имеет острую необходимость во внедрении в производство новых технологий, которые соответствуют постоянно возрастающим требованиям к качеству, материало- и энергосбережению, обеспечению экологической безопасности и др. Доля метода непрерывной разливки в общем объёме производства стальной заготовки в Украине составляет около 20% [1].

Одной из важнейших задач, которую необходимо решить для усовершенствования технологии непрерывной разливки, является определение оптимального температурного режима в зоне вторичного охлаждения (ЗВО) машины непрерывного литья заготовок (МНЛЗ).

В связи с этим возникает необходимость решения такого практически важного класса нелинейных краевых задач математической физики как задачи с неизвестными границами. Наболее широко для этого в настоящее время используются численные методы. Постоянно растущие вычислительные возможности ЭВМ позволяют расчитывать достаточно подробные и сложные математические модели.

Исследованию численного моделирования тепловых процессов с переходом из одного фазового состояния в другое (так называемой задачи Стефана) посвящено множество работ, которые используют два основных подхода. Первый из них – метод сглаживания коэффициентов основного уравнения применим к наиболее широкому классу задач и не предполагает выделения границы раздела фаз [2]. Второй, предложенный позднее, связан с выделением фронта затвердевания. Его привлекаеют в случаях, когда предъявляются повышенные требования к точности определения границ. В работе [3] этот метод реализуется с помощью ловли фронта в узел сетки, а в [4] – с помощью теории потенциала.

В работе [5] построена математическая модель теплового поля кристаллизатора МНЛЗ, в которой процессы внутреннего теплообмена описываются нелинейными эллиптическими уравнениями в частных производных. Для решения поставленной задачи подобраны конечно-разностные аппроксимации, учитывающие нелинейность уравнений а также разработан специальный алгоритм позволящий определить положение свободной границы непосредственно из условий Стефана.

Данная работа рассматривает квазистационарную задачу находжения двумерного поля температур и границы раздела фаз стального слитка, движущегося с постоянной скоростью в ЗВО, которая содержит криволинейные участки. Положение неизвестной границы определяется непосредственно из условия равенства температур и условия Стефана. Граничные условия учитывают сложный характер теплообмена слитка с окружающей средой.

1. Характеристика теплового процесса в ЗВО. В МНЛЗ выделяют две основные зоны, в которых производится отвод тепла: кристаллизатор и зона вторичного охлаждения (ЗВО). Затвердевание непрерывного слитка начинается в кристаллизаторе. Говоря о ЗВО, подразумевают ту часть МНЛЗ под кристаллизатором, в которой производится интенсивное принудительное охлаждение заготовки.

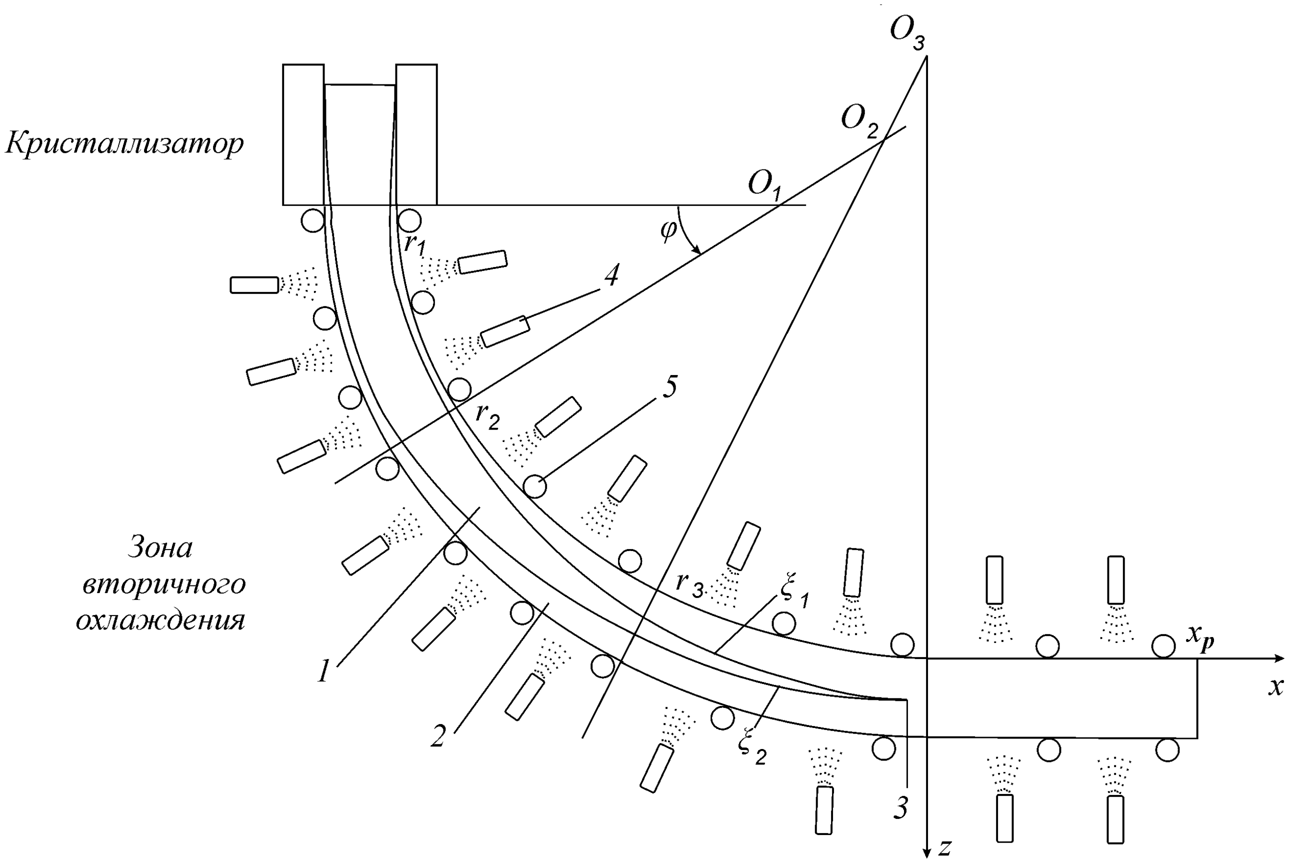

Рис. 1. Тепловая схема зоны вторичного охлаждения. 1 - жидкая фаза; 2 - твёрдая фаза; 3 - глубина жидкой фазы; 4 - форсунки, распыляющие водовоздушную смесь; 5 - водоохлаждаемые ролики.

По выходе из кристаллизатора заготовка попадает в ЗВО. К этому моменту у непрерывного слитка уже образовалась твёрдая корочка, но внутри ещё находится жидкий металл [1]. ЗВО разбита не несколько секций. Каждая секция оборудована опорными элементами (роликами), которые направляют движение заготовки и предотвращают деформацию граней слитка под действием ферростатического давления. Принудительное охлаждение достигается путём опрыскивания поверхности движущегося слитка водовоздушной смесью, распыляемой специальными форсунками, и отводом тепла к водоохлаждаемым роликам.

Также имеют место потери тепла за счёт конвекции и излучения в окружающую среду. Форсуночно-роликовая конструкция вторичного охлаждения создаёт условия мягкого и равномерного охлаждения застывающего слитка.

Технологически правильным является вторичное охлаждение, которое обеспечивает:

1) окончание затвердевания непрерывного слитка в ЗВО;

2) интенсивность теплоотвода, при котором происходит равномерное и непрерывное понижение температуры поверхности слитка вплоть до окончания затвердевания, но не ниже температуры пластической деформации во избежание образования трещин. Это особенно важно, когда слиток проходит криволинейные участки МНЛЗ.

Важными факторами также являются распределения расхода воды по секциям и общая длина ЗВО. При недостаточной длине ЗВО может иметь место повторный разогрев поверхности слитка за счёт выделения скрытой теплоты кристаллизации. При этом поверхностные слои затвердевшей корочки начинают расширяться и у фронта кристаллизации возникают растягивающие напряжения, что может привести к образованию внутренних трещин.

Также обязательным условием при конструировании МНЛЗ является расположение валков тянущей клети на некотором расстоянии ниже участка, где заканчивается затвердевание слитка. Попадание слитка с жидкой сердцевиной в валки тянущих клетей приводит к образованию характерных внутренних трещин. С другой стороны одной из проблем непрерывной разливки является увеличение производительности установок с обеспечением требуемого качества непрерывного слитка. Повышение с этой целью скорости разливки влечёт за собой увеличение глубины жидкой фазы, изменение фронта затвердевания и др.

2. Математическая модель . При построении математической модели сделаны следующие допущения: процесс формирования слитка является установившимся, скорость движения слитка (на криволинейных участках – угловая, а на прямолинейных – линейная) есть величина постоянная, перемешивание жидкого металла внутри слитка не учитывается, слиток считается сплошной однородной средой, поток тепла в направлении перпендикулярном узким граням слитка пренебрежимо мал (такое допущение возможно при отношении ширины слитка к его толщине $\geqslant 4$) и др.

Уравнения теплопроводности для металла на криволинейных участках МНЛЗ выглядят следующим образом [6]:

$$\theta_j \frac{\partial T_i(r,\phi)}{\partial \phi} = \frac{1}{c_i(T_i)\rho_i(T_i)} \left\{ \frac{\partial}{\partial r}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial r}\right] + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial \phi}\left[\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial \phi}\right] + \frac{\lambda_i(T_i)}{r}\frac{\partial T_i}{\partial r} \right\}, \quad (1)$$

$$i = \begin{cases} 1,\ \xi_1(\phi) < r < \xi_2(\phi) \\ 2,\ r_j < r < \xi_1(\phi) \ \text{ и } \ \xi_2(\phi) < r < r_j + 2l, \end{cases}$$

где θ_j – угловая скорость движения слитка на j-м участке; T_1 – температура в жидкой фазе; T_2 – температура в твёрдой фазе; $c_1(T_1)$, $c_2(T_2)$, $\rho_1(T_1)$, $\rho_2(T_2)$, $\lambda_1(T_1)$, $\lambda_2(T_2)$ – удельная теплоёмкость, плотность, теплопроводность металла в жидкой и твёрдой фазах соответственно; $\xi_1(\phi)$, $\xi_2(\phi)$ – границы раздела фаз, j – номер секции ЗВО.

Кроме того, нужно предусмотреть случай, когда жидкая фаза присутствует и после точки распрямления. В этом случае уравнения теплопроводности на прямолинейном участке выглядят следующим образом:

$$v\frac{\partial T_i(x,z)}{\partial x} = \frac{1}{c_i(T_i)\rho_i(T_i)}\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\lambda_i(T_i)\frac{\partial T_i}{\partial z}\right)\right\}, \tag{2}$$

$$i = \begin{cases} 1, \ \xi_1(x) < z < \xi_2(x) \\ 2, \ z_p < z < \xi_1(x) \ \text{ и } \ \xi_2(x) < z < z_p + 2l, \end{cases}$$

где v – скорость вытягивания слитка; z_p, z_p+2l – координаты, соответствующие боковым граням слитка.

Граничные условия для боковых граней слитка учитывают конвективный и излучательный механизмы теплоотвода, а также зависимость температуры окружающей среды и коэффициентов теплоотдачи и излучения от расположения форсунок и расхода воды:

$$\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_j} = \alpha_{Ij}(W_B,\varphi)\cdot\Big(T_2|_{r=r_j} - T_{Ij}(\varphi)\Big) + C_{Ij}(T_2,\varphi)\left(\Big[T_2|_{r=r_j}\Big]^4 - [T_{Ij}(\varphi)]^4\right), \tag{3}$$

$$\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial r}\bigg|_{r=r_j+2l} = \alpha_{Ej}(W_B,\varphi)\cdot\Big(T_2|_{r=r_j+2l} - T_{Ej}(\varphi)\Big) + C_{Ej}(T_2,\varphi)\left(\Big[T_2|_{r=r_j+2l}\Big]^4 - [T_{Ej}(\varphi)]^4\right),$$

где j – номер секции ($j = 1, 2, 3$); α_{Ij}, α_{Ej} – коэффициент теплоотдачи от поверхности слитка в окружающую среду в j-й секции для внутреннего и внешнего радиусов соответственно; W_B – расход воды; C_{Ij}, C_{Ej} – приведённый коэффициент излучения от поверхности слитка в окружающую среду в j-й секции для внутреннего и внешнего радиусов соответственно; T_{Ij}, T_{Ej} – абсолютная температура окружающей среды на соответствующих участках МНЛЗ.

Аналогично задаются граничные условия для боковых граней слитка на прямолинейном участке:

$$\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=z_p} = \alpha_{I4}(W_B,z)\cdot(T_2|_{z=z_p} - T_{I4}(z)) + C_{I4}(T_2,z)\left(\Big[T_2|_{z=z_p}\Big]^4 - [T_{I4}(z)]^4\right),$$

$$\lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial z}\bigg|_{z=z_p+2l} = \alpha_{E4}(W_B,z)\cdot(T_2|_{z=z_p+2l} - T_{E4}(z)) + C_{E4}(T_2,z)\left(\Big[T_2|_{z=z_p+2l}\Big]^4 - [T_{E4}(z)]^4\right), \tag{4}$$

В конце прямолинейного участка задаются условия Дирихле.

$$\partial T_2(x,z)|_{x=x_p} = f(z), \tag{5}$$

Условия на границах раздела фаз:

– условия равенства температур:

$$T_1(r,\varphi)|_{r=\xi_{1-}(\varphi)} = T_2(r,\varphi)|_{r=\xi_{1+}(\varphi)} = T_{\text{кр}},$$

$$T_1(r,\varphi)|_{r=\xi_{2-}(\varphi)} = T_2(r,\varphi)|_{r=\xi_{2+}(\varphi)} = T_{\text{кр}}, \tag{6}$$

– условия Стефана:

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}}\bigg|_{r=\xi_{1-}(\varphi)} - \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{n}}\bigg|_{r=\xi_{1+}(\varphi)} = -\mu\rho(T_{kr})\theta_j\frac{d\xi_1}{d\varphi},$$

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}}\bigg|_{r=\xi_{2-}(\varphi)} - \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{n}}\bigg|_{r=\xi_{2+}(\varphi)} = \mu\rho(T_{kr})\theta_j\frac{d\xi_2}{d\varphi}, \quad 0 \le \varphi \le \Phi, \tag{7}$$

где μ – скрытая теплота кристаллизации; T_{kr}– температура кристаллизации (средняя из интервала ликвидус – солидус), $\bar{n}$– нормаль к поверхности раздела фаз, Φ – угол, соответствующий глубине жидкой фазы.

Как было сказано выше, жидкая фаза может присутствовать в слитке и после точки распрямления. Тогда в прямоугольной системе координат условия Стефана будут выглядеть следующим образом:

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}}\bigg|_{z=\xi_{1-}(x)} - \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{n}}\bigg|_{z=\xi_{1+}(x)} = -\mu\rho(T_{kr})v\frac{d\xi_1}{dx},$$

$$\lambda_1(T_1)\frac{\partial T_1}{\partial \bar{n}}\bigg|_{z=\xi_{2-}(x)} - \lambda_2(T_2)\frac{\partial T_2}{\partial \bar{n}}\bigg|_{z=\xi_{2+}(x)} = \mu\rho(T_{kr})v\frac{d\xi_2}{dx}, \quad 0 \le x \le X, \tag{8}$$

Поставленная задача является нелинейной краевой задачей. Нелинейности, сложные граничные условия и непростая геометрическая форма не дают возможности получить для неё аналитическое решение.

Коэффициент теплоотдачи от поверхности слитка зависит от расположения форсунок, подающих водовоздушную смесь, которая с большой скоростью направляется по нормали на охлаждаемую поверхность, и расхода воды на форсунку. Благодаря высокой скорости струй конвективная теплоодача весьма интенсивна, что приводит к быстрому охлаждению.

Уравнение зависимости теплофизических и конструктивных параметров в этом случае выглядит следующим образом:

$$Nu = \eta \cdot Re^m Pr^{0,33}, \tag{9}$$

где Nu – критерий Нуссельта, обычно называемый безразмерным коэффициентом теплоодачи, Re – критерий Рейнольдса, Pr – критерий Прандтля. Параметры η и m зависят от относительного расстояния от плоскости истечения до охлаждаемой поверхности S/d (S - расстояние от плоскости истечения до поверхности, d - диаметр сопла).

Выражая из (9) коэффициент теплоотдачи, получаем

$$\alpha_B = \frac{\lambda_B \cdot \eta}{l}\left(\frac{l}{k}\right)^m \left(\frac{k}{a}\right)^{0,33} \cdot \frac{1}{S^m} \cdot G_B^m, \tag{10}$$

где λ_B – коэффициент теплопроводности водо-воздушной смеси, l – расстояние между двумя соседними форсунками, k – коэффициент кинематической вязкости, a – коэффициент температуропроводности, G_B – расход воды.

Для описания распределения коэффициента теплоотдачи внутри факела форсунки использована параболическая зависимость, что хорошо согласуется с техническими характериститками современных плоскоконусных форсунок.

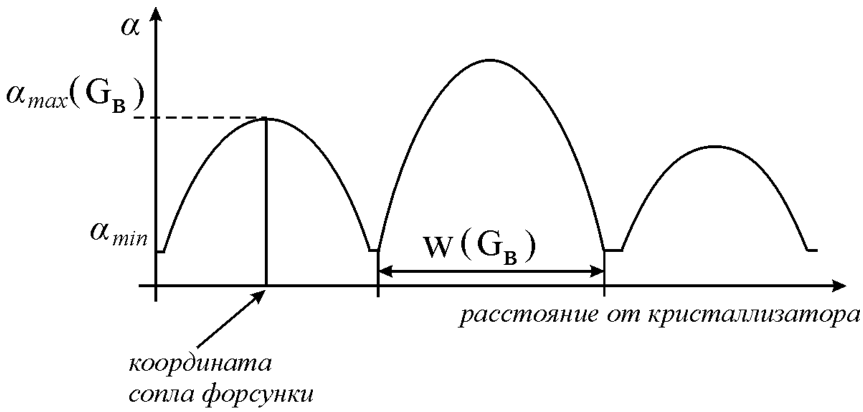

Рис. 2. Распределение коэффициента теплоотдачи по длине слитка в зависимости от расположения форсунок подающих водовоздушную смесь. $\alpha_{max}(G_B)$ – максимальное значение коэффициента теплоотдачи зависящее от расхода воды; α_{min} – коэффициент теплоотдачи за счёт свободной конвекции; $w(G_B)$ – ширина области накрываемой факелом форсунки зависящая от расхода воды .

3. Конечно-разностная аппроксимация задачи. Для построения конечно- разностного аналога квазистационарного уравнения теплопроводности используются равномерные и неравномерные пятиточечные шаблоны. Для криволинейной зоны вводится равномерная сетка в полярных координатах с шагом q - по координате r, и шагами s_1, s_2, s_3 - по координате φ для каждой секции криволинейного участка ЗВО. Для прямолинейной зоны вводится равномерная прямоугольная сетка с шагом q по координате x и шагом h по координате z. Шаги выбраны кратными размерам слитка.

На границе между кристаллизатором и вторичной зоной охлаждения точки с координатой $z = Z$ считаются внутренними, и температура в них расчитывается как во внутренних.

Таким образом для внутренних точек области жидкой фазы (твёрдой фазы) получаем систему линейных уравнений, для которой выполняется достаточное условие сходимости метода Гаусса-Зейделя [7].

Для аппроксимации условий Стефана используется равномерный шаблон (рис. 3). Температура в дополнительных точках аппроксимируется с помощью полиномов Лагранжа 2-й степени. Таким образом на каждом слое мы получаем нелинейное уравнение с одним неизвестным – положением границы раздела фаз на данном слое.

$$\sqrt{\left(\frac{U_1(x)-T_{kr}}{q}\right)^2+\left(\frac{U_2(x)-T_{kr}}{s_j}\right)^2}-\sqrt{\left(\frac{T_{kr}-U_3(x)}{q}\right)^2+\left(\frac{T_{kr}-U_4(x)}{s_j}\right)^2}=\mu\varrho\theta_j\frac{x-x_0}{s_j}, \qquad (11)$$

где $U_i(x)$ – значения температурного поля в дополнительных точках шаблона ($i = \overline{1,4}$), x_0 – положение границы раздела фаз, найденное на предыдущем слое.

Легко проверить, что на интересующем нас отрезке это уравнение имеет не более одного корня. Следовательно, для решения можно использовать метод дихотомии. Если же уравнение корней не имеет, выбирается тот конец отрезка, где абсолютное значение функции меньше.

Для аппроксимации производной первого порядка в граничных условиях на поверхности слитка используется конечно-разностный аналог первой производной второго порядка точности.

4. Алгоритм решения задачи. Начальное приближение положения границ раздела фаз задаётся двумя линиями, которые пересекаются на оси слитка, в точке соответствующей начальному приближению глубины жидкой фазы, подбираемому соответствующим скорости вытягивания слитка. Обе эти линии выбраны так, чтобы на выходе из кристаллизатора толщина твёрдой корочки равнялась бы 1/4 полутолщины слитка, что приблизительно совпадает с экспериментальными данными установившегося процесса непрерывной разливки.

Начальное приближение поля температур строится следующим образом:

– на оси слитка на границе кристаллизатора и ЗВО температура задаётся равной температуре найденной в работе [5], далее по оси задаётся линейная функция до точки окончательного затвердевания и затем линейная функция до конца слитка, где заданы условия Дирихле.

– внутри жидкой фазы температура приближается параболой с максимумом на оси слитка и значением равным температуре кристаллизации на границе раздела фаз;

– внутри твёрдой фазы температура приближена линейными функциями.

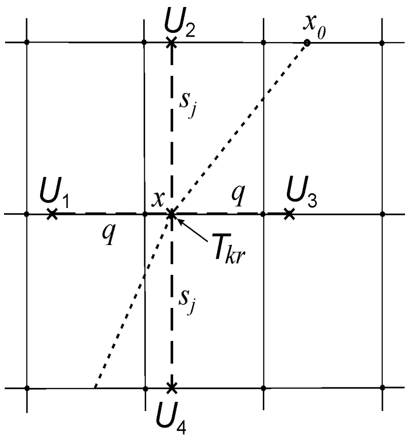

Рис. 3. Равномерный шаблон для перерасчёта положения границы раздела фаз.

Алгоритм решения задачи состоит в выполнении следующих операций:

1) расчёт температурного поля кристаллизатора;

2) расчёт температурного поля внутри жидкой фазы ЗВО;

3) расчёт температурного поля внутри твёрдой фазы ЗВО;

4) расчёт граничных условий для боковых граней слитка в ЗВО;

5) нахождение нового приближения положения границы раздела фаз;

6) проверка условий достижения желаемой точности. В случае невыполнения переход на п.1).

Достижение желаемой точности означает, что разность между вновь построенным и предыдущим приближениями поля температур в каждом узле разностной сетки стала меньше некоторого наперёд заданного числа. Результат последней итерации вычислений и принимается как решение поставленной краевой задачи (1) – (8).

Для реализации этого алгоритма была написана программа на языке C++ в среде проектирования Builder 6.0. Результаты вычислений представлены в виде цветовой диаграммы отображающей температурное поле МНЛЗ а также различных графиков. Полученные значения достаточно хорошо согласуются с экспериментальными данными.

5. Численные результаты. На рисунке 4 приведены графики распределения температур вдоль внутренней и внешней поверхностей кристаллизатора и оси слитка при различных расходах воды в форсунках, подающих водо-воздушную смесь, для одной и той же скорости вытягивания слитка. Здесь можно видеть, как явно выделяются три зоны с различными расходами воды и последняя четвёртая зона, где теплоотвод осуществляется только за счёт свободной конвекции и излучения. Также хорошо заметно, что увеличение расхода воды в форсунке увеличивает перепад температур на

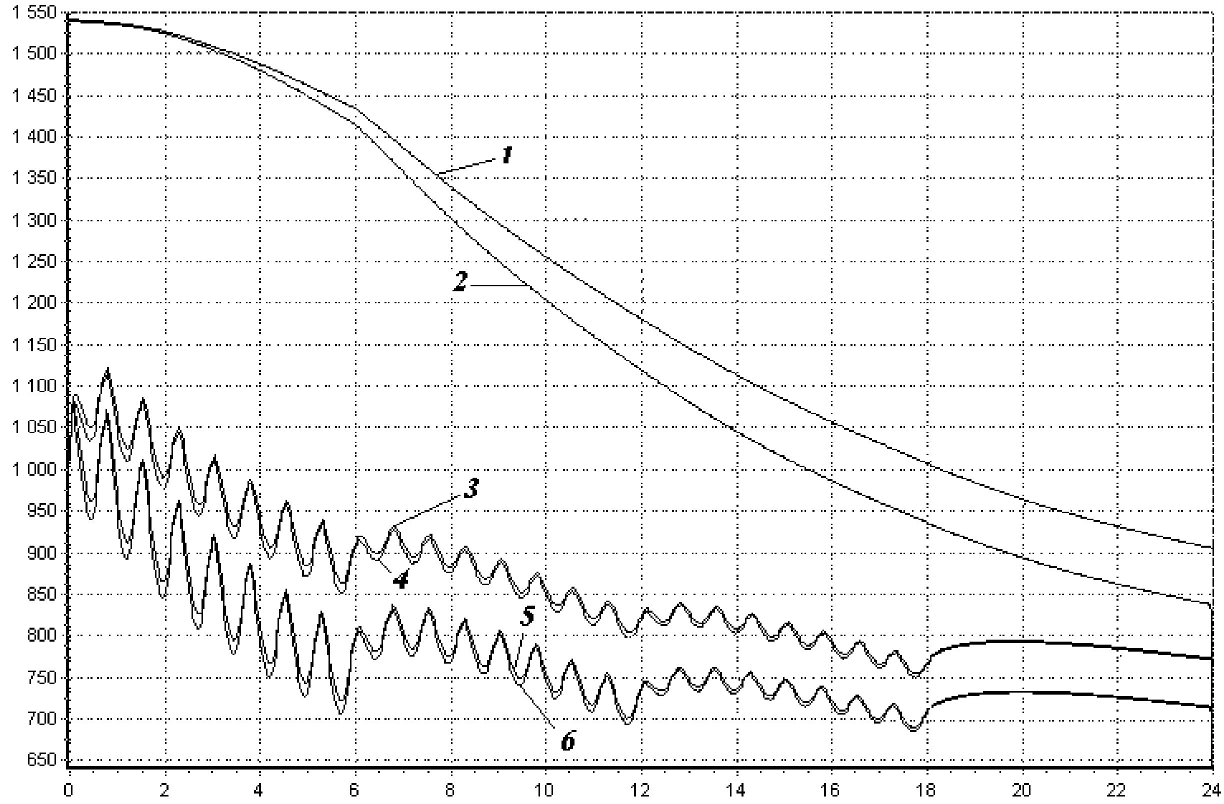

Рис. 4. Распределение температуры вдоль поверхностей и оси слитка при разных расходах воды. 1, 2 - температура вдоль оси слитка; 3, 5 - температура поверхности внутреннего радиуса; 4, 6 - температура поверхности внешнего радиуса; 1, 3, 4 - соответствуют расходу воды: 10 л/мин в первой секции и 5 л/мин во второй и третьей секциях; 2, 5, 6 - соответствуют расходу воды: 20 л/мин в первой секции и 10 л/мин во второй и третьей секциях.

поверхности слитка внутри области накрываемой факелом форсунки, что нежелательно сказывается на качестве конечного продукта.

Расчёты по модели позволяют установить численную зависимость температурных полей и положения границы раздела фаз в зависимости от расхода воды на каждую форсунку ЗВО. Численные результаты отображенные на рис.4 дают представление о том, насколько управляющие параметры (в данном случае расход воды) влияют на теплоотвод, температуру поверхности слитка и температурные напряжения.

На рисунке 5 приведены графики распределения температур вдоль внутренней и внешней поверхностей и на оси при различных скоростях вытягивания слитка, но при одном и том же режиме расхода воды. Перепады температуры внутри каждой области, накрываемой факелом форсунки, практически не зависят от скорости движения заготовки. Однако можно видеть, что при большей скорости разливки значительно увеличивается повторный разогрев поверхности слитка при выходе его из зоны принудителного охлаждения. Следовательно, можно сделать вывод о необходимости включения в работу дополнительных секций охлаждения при увеличении скорости разливки, что соответствует технологии непрерывного литья.

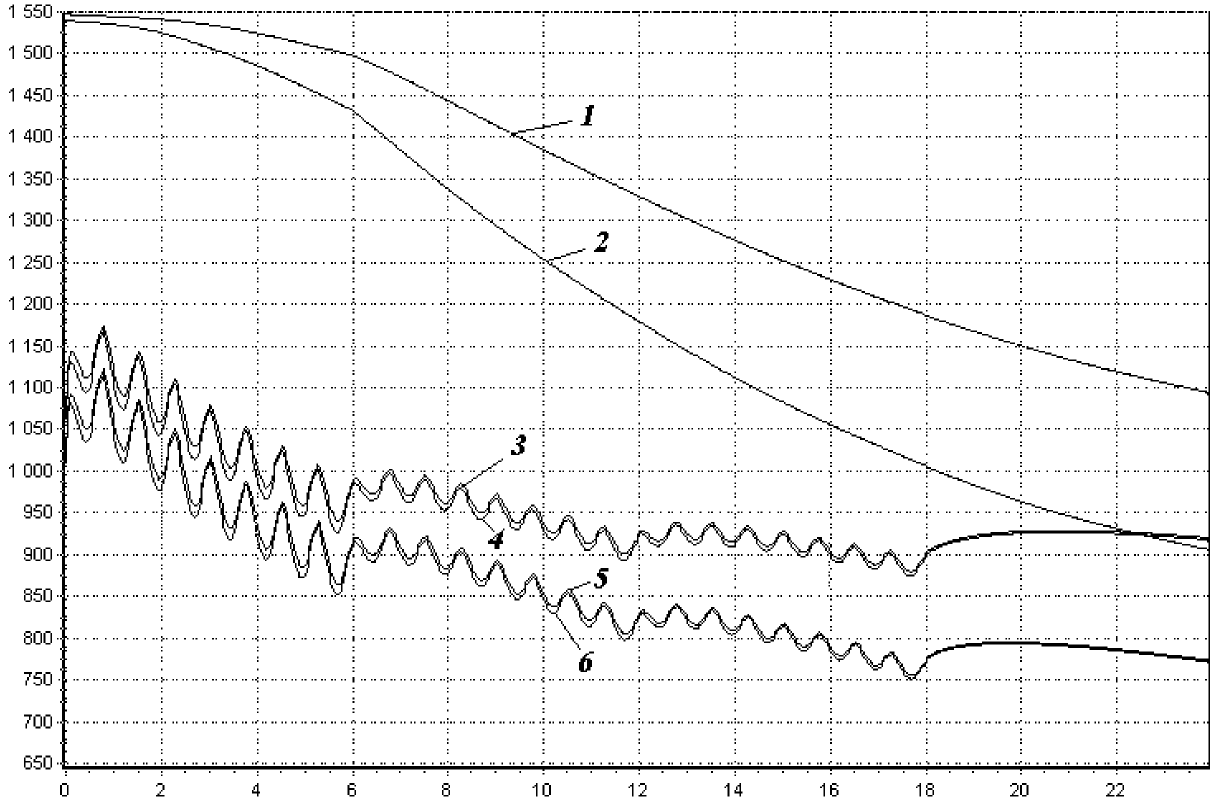

Рис. 5. Распределение температуры вдоль поверхностей и оси слитка при разных скоростях вытягивания слитка. 1, 2 - температура вдоль оси слитка; 3, 5 - температура поверхности внутреннего радиуса; 4, 6 - температура поверхности внешнего радиуса; 1, 3, 4 - соответствуют скорости вытягивания слитка равной 1,5 м/мин; 2, 5, 6 - соответствуют скорости вытягивания слитка равной 1 м/мин;.

1. *Смирнов А.Н., Пилюшенко В.Л., Минаев А.А., Момот С.В., Белобров Ю.Н.* Процессы непрерывной разливки. – Донецк: ДонНТУ, 2002. – 536с.
2. *Будак Б.М., Соловьёва Е.М., Успенский А.Б* Разностный метод со сглаживанием коэффициентов для решения задач Стефана. // Ж. Вычислительной математики и математической физики. – 1965. – Т. 5. – № 5. – стр. 828 - 840.
3. *Васильев Ф.П., Успенский А.Б.* Разностный метод решения двухфазной задачи Стефана. // Ж. Вычислительной математики и математической физики. – 1963. – Т. 3. – №5. – стр. 874 - 886.
4. *Вабищевич П.Н., Вабищевич Т.Н.* Об одном методе численного решения задачи Стефана. // Вестник Московского университета. – 1983. – Сер. 15. – №4. – стр. 17 - 22.
5. *Иванова А.А.* Математическая модель затвердевания непрерывного слитка в кристаллизаторе. // Труды ИПММ НАН Украины. – 2004. – Вып. 9. – стр. 81 - 88.
6. *Тихонов А.Н., Самарский А.А.* Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
7. *Андерсон Д., Таннехилл Дж., Плетчер Р.* Вычислительная гидромеханика и теплообмен. – М.: Мир, 1990. – Т. 1. – 384 с.

Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк
ivanova@iamm.ac.donetsk.ua

Получено 03.11.2005